חקירת פונקציות
פולינום

פולינום - הגדרה ומושגים

פונקציית פולינום - פונקציה המורכבת מסכום פונקציות חזקה.

דוגמאות: $5x^2+4x$, $12x^3+6x^2-2x+1$, 0, x

מעלת הפולינום - מסומנת deg, ומתייחסת למספר המהווה את המעריך הגדול ביותר בפולינום.

דוגמאות: $\deg(5)=0$, $\deg(x^2+1)=2$, $\deg(2x)=1$

איבר מוביל - האיבר המוביל הוא הביטוי המלא המכיל את מעלת הפולינום.

*הערה: כפי שלמדנו בקדם אנליזה, האיבר המוביל קובע את התנהגות הפולינום באינסוף.

דוגמאות: האיבר המוביל של $-3x^2+2x+1$ הוא $-3x^2$.

שלב ראשון בחקירה - תחום הגדרה

כל פונ' הפולינום מוגדרות לכל x, שכן אינה מגבילה שימוש בערכים כלשהם.

<u>דוגמה לשאלה:</u>

מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=7x^2+12x+1$

<u>תשובה:</u> f פולינום, ולכן מוגדרת לכל x.

שלב שני בחקירה - נקודות חיתוך עם הצירים

חיתוך עם ציר y:

נקודת חיתוך עם ציר y היא תמיד מהצורה $(0, y)$, ולכן, כדי למצוא מתי $f(x)$ חותכת את ציר y, נציב בנקודה $(0,f(y))$.

חיתוך עם ציר x:

נקודות חיתוך עם ציר x תמיד מהצורה $(x, 0)$, ולכן, כדי למצוא מתי $f(x)$ חותכת את ציר y, נשווה את $f(x)$ ל-0, ונציב את פתרונות המשוואה בנקודות $(x, 0)$.

דוגמה לשאלה:

מצאו מתי $f(x)=x^4-4x^2+3$ חותכת את הצירים.

תשובה:

חיתוך עם ציר y: $(0,f(0))=(0,0^4-4\cdot 0^2+3)=(0,3)$

חיתוך עם ציר x: מפתרון המשוואה - $(-\sqrt{3},0),(-1,0),(1,0),(\sqrt{3},0)$

$$x^4-4x^2+3=0$$

$$\overset{t=x^2}{\Longrightarrow}\quad t^2-4t+3=0$$

$$\overset{\text{פירוק}}{\Longrightarrow}\quad (t-3)(t-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad t_1=3 \qquad t_2=1$$

$$x^2=3 \qquad x^2=1$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{3} \qquad x_{3,4}=\pm 1$$

שלב שלישי בחקירה - מציאת וסיווג נקודות קיצון

נקודת קיצון מסוג מקסימום: נקודה בה מגמת הפונ' משתנה מעלייה לירידה

נקודת קיצון מסוג מינימום: נקודה בה מגמת הפונ' משתנה מירידה לעלייה

מציאת הקיצון תעשה ע"י השוואת הנגזרת ל-0 ובחינת כיוון הפונ' בתחומים שבין נק' התאפסות הנגזרת.

דוגמה לשאלה:

מצאו וסווגו נקודות קיצון לפונ' $f(x)=x^4-4x^2+3$.

תשובה:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-8x=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-2)=0$$

ומכאן החשודות בקיצון הן: $x=0, \pm\sqrt{2}$. נצטרך טבלה:

x	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗

מן הטבלה, ניתן להסיק כי:

$min(\sqrt{2},-1)$

$max(0,3)$

$min(-\sqrt{2},-1)$

שלב רביעי בחקירה – תחומי עלייה וירידה

במידה ועקבתם על פי שלב 3 בחקירה כמו שצריך, עם טבלה, תוכלו ישר להסיק את תחומי העלייה והירידה.

<u>דוגמה לשאלה:</u>

מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)=x^4-4x^2+3$.

<u>תשובה:</u> מן השלב הקודם, קיבלנו:

x	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

ולפיכך, f עולה עבור $x>\sqrt{2}$ או $-\sqrt{2}<x<0$

ו-f יורדת עבור $x<-\sqrt{2}$ או $0<x<\sqrt{2}$

שלב אחרון בחקירה - שרטוט סקיצה

בשלב זה, עלינו לשרטט בעזרת סרגל מערכת צירים, ולמקם בקנה מידה הגיוני את כל המידע מהסעיפים הקודמים, ולבסוף, לחבר את הנקודות.

<u>דוגמה לשאלה:</u>

שרטטו סקיצה לגרף הפונ' $f(x)=x^4-4x^2+3$

<u>תשובה:</u> ראינו משלבים קודמים כי:

$max\ (0,3)$ ונק' חיתוך עם ציר y

$(1,0)$ $(-1,0)$ $(-\sqrt{3},0)$ $(\sqrt{3},0)$ נק' חיתוך עם ציר x

$min\ (\pm\sqrt{2},-1)$