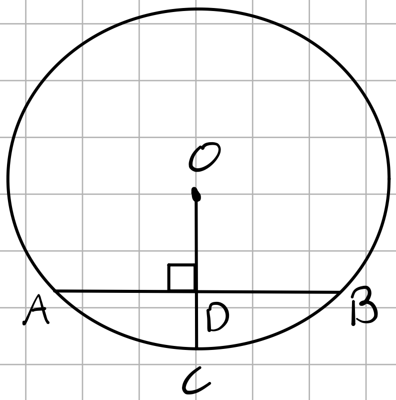
# המעגל - משפטי בסיס

סיכום -
אביב בן-עמר

# האנך ממרכז המעגל

**משפט:** אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל - חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר



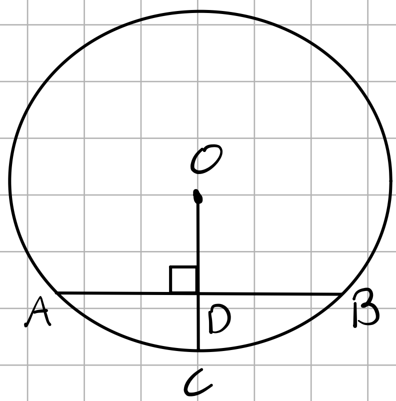

אם הנקודה O היא מרכז המעגל,

AB מיתר במעגל, ונתון $DO = AB$

אז $AD = BD$, $\angle OAD = \angle OBD$ ו- $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

**משפט:** קטע המחבר את מרכז המעגל עם אמצע מיתר - מאונך למיתר

**משפט:** קטע ממרכז המעגל החוצה זווית מרכזית - חוצה את המיתר שעליו נשענת הזווית, ומאונך לו.




אם נתון $\angle AOC = \angle BOA$

אז $AD = BD$ ו- $OD \perp AB$

**משפט:** אנך אמצעי למיתר במעגל, עובר דרך מרכז המעגל.

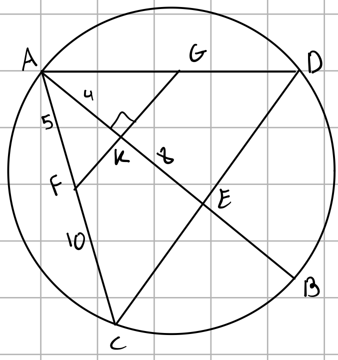
# תרגיל דוגמה

**נתון:** $\angle AKG = 90^\circ$

$AF = 5$ ס"מ , $FC = 10$ ס"מ

$KE = 8$ ס"מ , $AK = 4$ ס"מ

**הוכיחו:** $AB$ קוטר

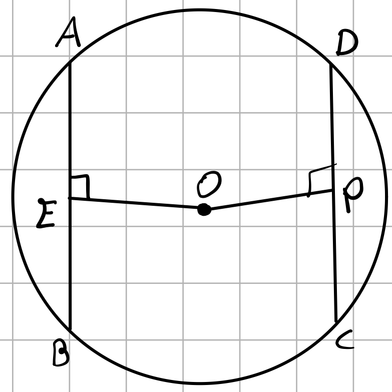



| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $FC = 10$ ס"מ, $AF = 5$ ס"מ<br>$AK = 4$ ס"מ, $KE = 8$ ס"מ | נתון |
| 2 | $\frac{AF}{FC} = \frac{10}{5} = 2$ | הצבה + חישוב |
| 3 | $\frac{KE}{AK} = \frac{8}{4} = 2$ | הצבה + חישוב |
| 4 | $\frac{AF}{FC} = \frac{KE}{AK}$ | כלל המעבר |
| 5 | $FG \parallel DC$ | משפט תלס הפוך |
| 6 | $\angle AKG = \angle AED = 90^\circ$ | נתון + זוויות מתאימות שוות... |
| 7 | $AB$ עובר במרכז המעגל | אנך אמצעי למיתר במעגל, עובר בנקודת מרכז המעגל |
| 8 | $AB$ קוטר | מיתר העובר במרכז המעגל הוא קוטר. |

# מרחק מיתרים ממרכז המעגל

**משפט:** מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל

**משפט:** מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל, שווים זה לזה.




אם $EO = OP$

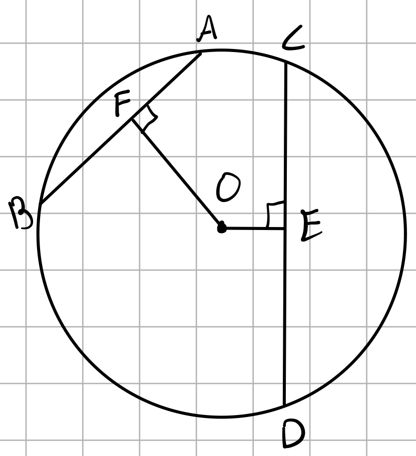
אז $AB = DC$

(ולהפך)

**הערה:** מרחק תמיד ימדד ע"י הורדת אנך.

**משפט:** שני מיתרים במעגל שאינם שווים זה לזה, נמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל, כך שהמיתר הגדול יותר, קרוב יותר למרכז המעגל.

**משפט:** שני מיתרים שנמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל אינם שווים זה לזה, כך שהמיתר הקרוב יותר למרכז, הוא המיתר הגדול מבין השניים.

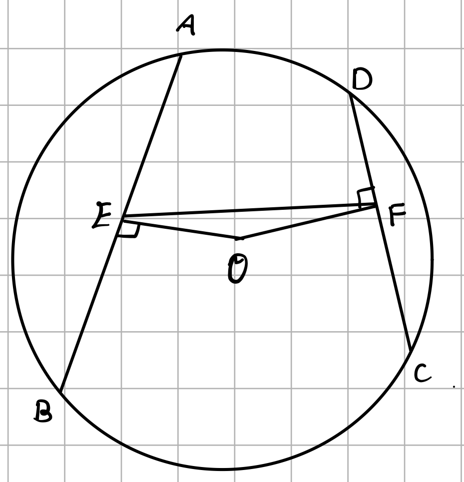



אם $AB < DC$

אז $OF > OE$

(ולהפך)

# תרגיל דוגמה




**נתון:**

$AB > DC$ , $OE \perp AB$ , $OF \perp DC$

**הוכיחו:** $\measuredangle OFE < \measuredangle OEF$

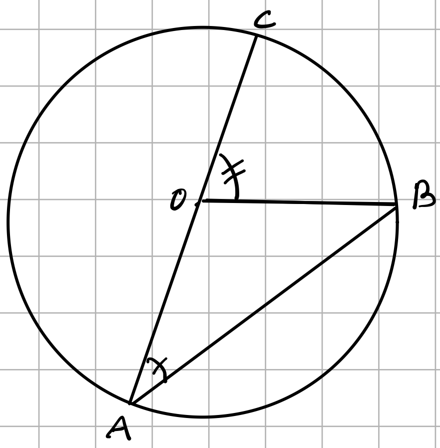
| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $OE \perp AB$, $OF \perp DC$ | נתון |
| 2 | $AB > DC$ | נתון |
| 3 | $OE < OF$ | שני מיתרים במעגל שאינם שווים זה לזה, נמצאים במרחקים שונים ממרכז המעגל, כך שהמיתר הגדול יותר, קרוב יותר למרכז המעגל |
| 4 | $EF = EF$ | בניית עזר |
| 5 | $\measuredangle OFE < \measuredangle OEF$ | אם צלע אחת במשולש גדולה מצלע שנייה, אז הזווית הנמצאת מול הצלע הגדולה, גדולה מהזווית שמול הצלע הקטנה |

# זוויות היקפיות וזוויות מרכזיות הנשענות על אותה הקשת

**הגדרה:** זווית שקודקודה נמצא על המעגל, ושוקיה הם שני מיתרים במעגל, נקראת זווית היקפית.

**משפט:** זווית היקפית במעגל שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

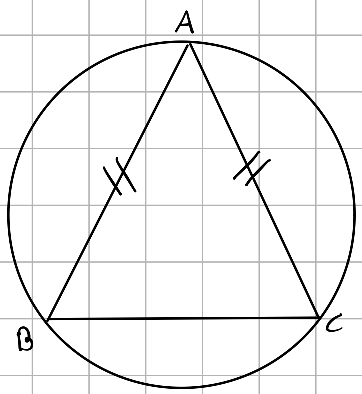
**משפט:** זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת עליה נשענת.




אם $\sphericalangle CAB=\alpha$

אז $\sphericalangle COB=\overset{\frown}{BC}=2\alpha$

# תרגיל לדוגמה




נתון: $\triangle ABC$ משולש שווה שוקיים החסום במעגל

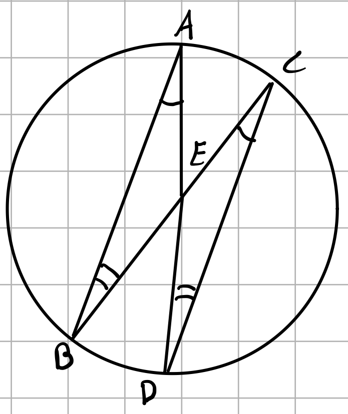
$$\overset{\frown}{BC} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{AC}$$

הוכיחו: $\measuredangle ABC = ?$

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $\triangle ABC$ שווה שוקיים | נתון |
| 2 | $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = \alpha$ | סימון + במשו"ש זוויות הבסיס שוות |
| 3 | $\measuredangle BAC = 180^\circ - 2\alpha$ | סכום זוויות במשולש $180^\circ$ |
| 4 | $\overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 4\alpha$ | זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת עליה נשענת |
| 5 | $\overset{\frown}{AC} = 2\alpha$ | זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת עליה נשענת |
| 6 | $\overset{\frown}{BC} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{AC}$ | נתון |
| 7 | $360^\circ - 4\alpha = \frac{4}{3}\alpha$ <br> $5\frac{1}{3}\alpha = 360^\circ$ <br> $\alpha = 67.5^\circ$ | הצבה + חישוב |
| 8 | $\measuredangle ABC = \alpha = 67.5^\circ$ | כלל המעבר |

# זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת

**משפט:** במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על אותה הקשת, שוות זו לזו



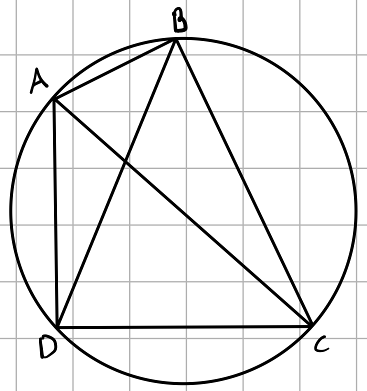

נשים לב ש- $\angle BAD$ ו- $\angle BCD$ נשענות שתיהן על $\overset{\frown}{BD}$, ולכן:

$$\angle BCD = \angle BAD$$

נשים לב ש- $\angle ABC$ ו- $\angle ADC$ נשענות שתיהן על $\overset{\frown}{AC}$, ולכן:

$$\angle ADC = \angle ABC$$

## תרגיל דוגמה:



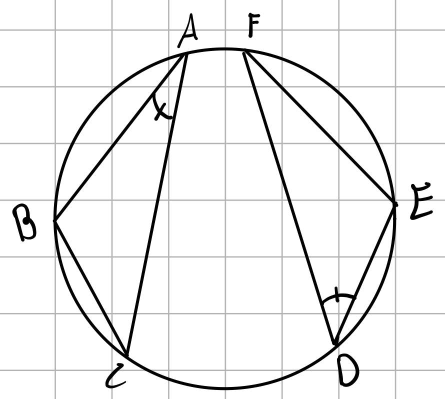

נתון: $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC$

הוכיחו: $BC = DC$

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = \alpha$ | נתון + סימון |
| 2 | $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DC} = 2\alpha$ | זווית היקפית שווה למחצית הקשת עליה נשענת + כלל המעבר |
| 3 | $\measuredangle DBC = \alpha$ | במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות מול אותה הקשת, שוות זו לזו |
| 4 | $BC = DC$ | במשולש, מול זוויות שוות, מונחות צלעות שוות |

# זוויות היקפיות הנשענות, על קשתות שוות

**משפט:** במעגל, לזוויות היקפיות שוות, מתאימות קשתות שוות.



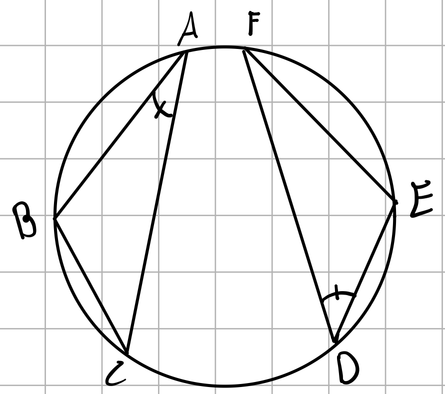

אם $\angle BAC = \angle FDE$

אז $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FE}$

**משפט:** במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות

אם $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FE}$ אז $\angle BAC = \angle FDE$

**משפט:** במעגל, לזוויות היקפיות שוות מתאימים מיתרים שווים.



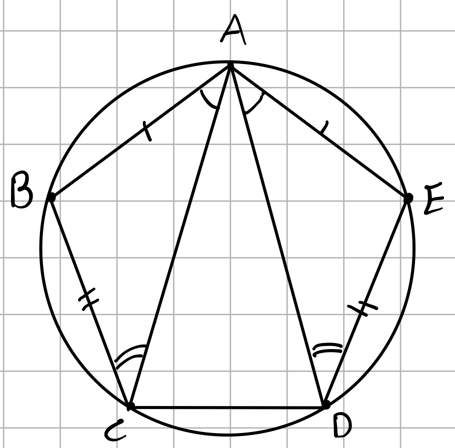

אם $\angle BAC = \angle FDE$

אז $BC = FE$

**משפט:** למיתרים שווים, מתאימות זוויות היקפיות שוות.

אם $BC = FE$ אז $\angle BAC = \angle FDE$

## תרגיל דוגמה:



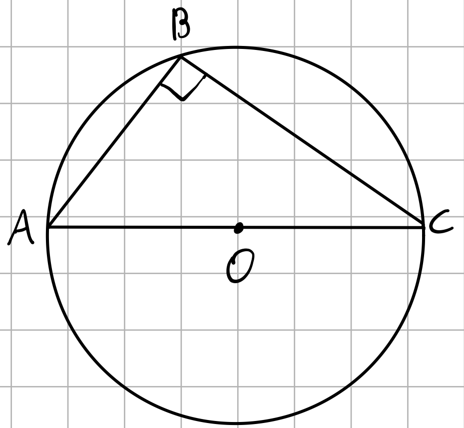

נתון: $BC = DE$ , $AB = AE$

הוכח: $\triangle ADC$ שווה שוקיים

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $AB = AE$ | נתון |
| 2 | $\angle ACB = \angle ADE$ | למיתרים שווים, מתאימות זוויות היקפיות שוות |
| 3 | $BC = DE$ | נתון |
| 4 | $\angle BAC = \angle DAE$ | למיתרים שווים, מתאימות זוויות היקפיות שוות |
| 5 | $\angle AED = \angle ABC$ | סכום זוויות במשולש $180^\circ$ |
| 6 | $\triangle ADE \cong \triangle ACB$ | ע"פ משפט חפיפה ז.צ.ז |
| 7 | $AD = AC$ | צלעות שוות בהתאמה במשולשים חופפים |
| 8 | $\triangle ADC$ שווה שוקיים | משולש בעל זוג צלעות שוות הוא משו"ש |

# זווית היקפית הנשענת על קוטר

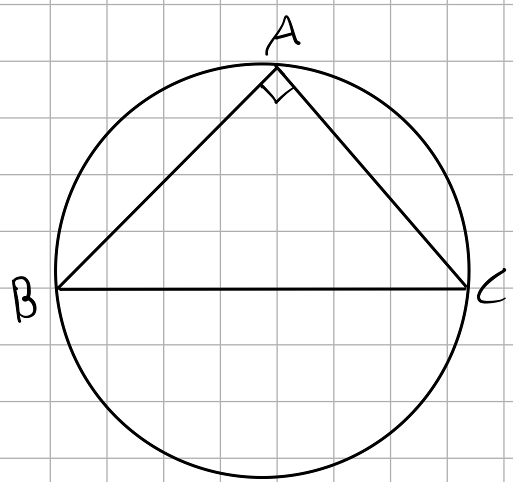
**משפט:** זווית היקפית הנשענת על קוטר, היא זווית ישרה.




אם $AC$ קוטר (כפי שמתואר)

אז $\measuredangle ABC = 90^\circ$

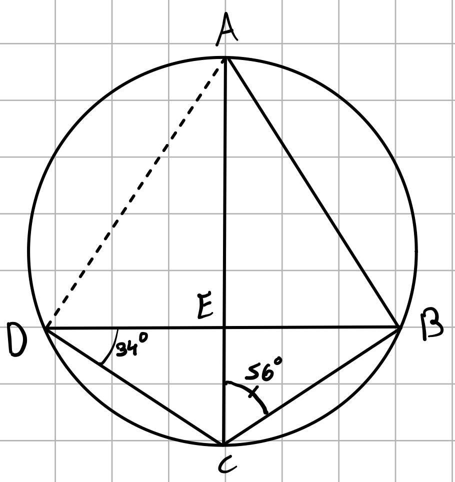
**משפט:** אם זווית היקפית שווה ל-$90^\circ$ אז היא נשענת על קוטר




אם $\measuredangle BAC = 90^\circ$

אז $BC$ קוטר

# תרגיל דוגמה:




**נתון:** $\measuredangle ACB = 56°$ , $\measuredangle BDC = 34°$

**הוכיחו:** $AD \perp DC$

| | טענה | נימוק |
|---|---|---|
| 1 | $\measuredangle BDC = 34°$ | נתון |
| 2 | $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = 34°$ | זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו |
| 3 | $\measuredangle ACB = 56°$ | נתון |
| 4 | $\measuredangle ABC = 90°$ | סכום זוויות במשולש $180°$ |
| 5 | AC קוטר במעגל | אם זווית היקפית שווה $90°$, אז היא נשענת על קוטר במעגל. |
| 6 | $\measuredangle ADC = 90°$ | אם זווית היקפית נשענת על קוטר במעגל, אז היא בת $90°$. |
| 7 | $AD \perp DC$ | לפי ישרים הלוכדים זווית ישרה, הם ישרים מאונכים. |