מבוא לפרופורציה ודמיון

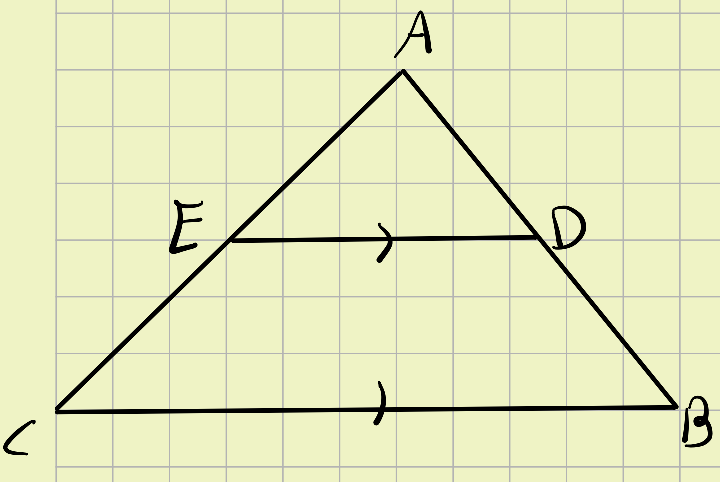
סיכום מאת
אביב בן-טמר
כיתה י'3

משפט תלס:

משפט תלס היה למשפט מהראשונים בתורת הדימיון והפרופורציה, שהפך לבסיסה.

משפט תלס אומר: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

משמעות גיאומטרית



נתון: $DE \parallel BC$

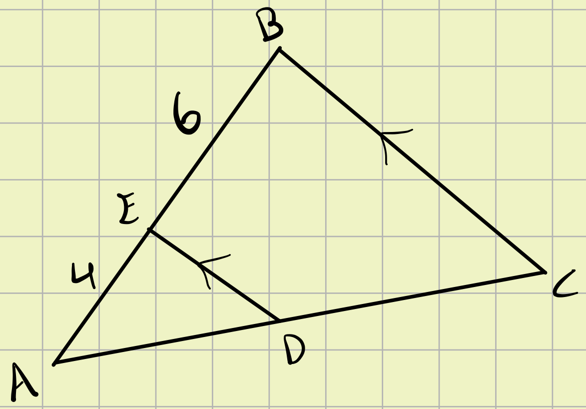
ע"פ משפט תלס ב-ΔABC:

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

הערה: בבגרות ניתן לנמק את המשפט באותו האופן כפי שנמק בדוגמה לעיל.

דוגמת תרגיל:



נתון:

$BC \parallel DE$, $AE =$ 4 ס"מ

$BE =$ 6 ס"מ , $AC =$ 20 ס"מ

הוכיחו: $AD = ?$, $DC = ?$

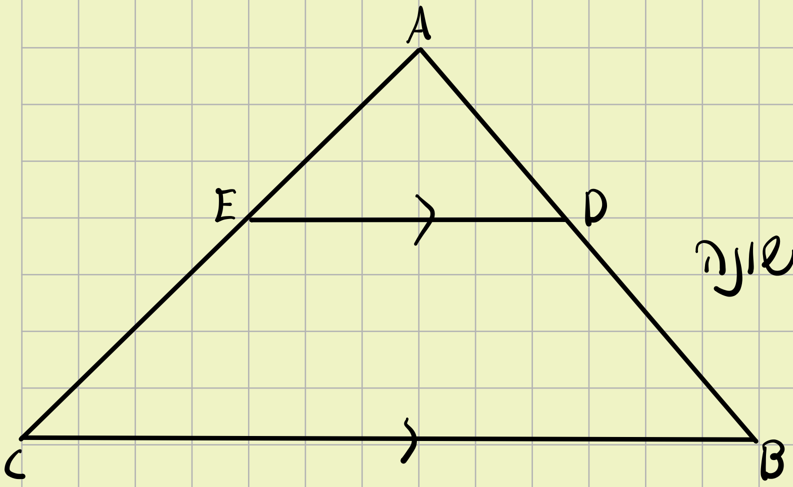
	טענה	נימוק
1	$BC \parallel DE$	נתון
2	$AE =$ 4 ס"מ	נתון
3	$BE =$ 6 ס"מ	נתון
4	$AC =$ 20 ס"מ	נתון
5	$AD = x$	סימון
6	$DC = 20 - x$	השלמה 20-8 ס"מ
7	$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}$	משפט תלס ב- $\triangle ABC$
8	$\frac{4}{6} = \frac{x}{20-x}$	הצבה
9	$x =$ 8 ס"מ	חישוב
10	$AD =$ 8 ס"מ, $DC =$ 12 ס"מ	הצבה

■

הרחבה ראשונה של תלס:

לאחר הוכחת משפט תלס, מהר מאוד נוצרו ממנו והוכחו משפטים נוספים - הרחבות למשפט תלס.

ההרחבה הראשונה:



נתון: $DE \parallel BC$

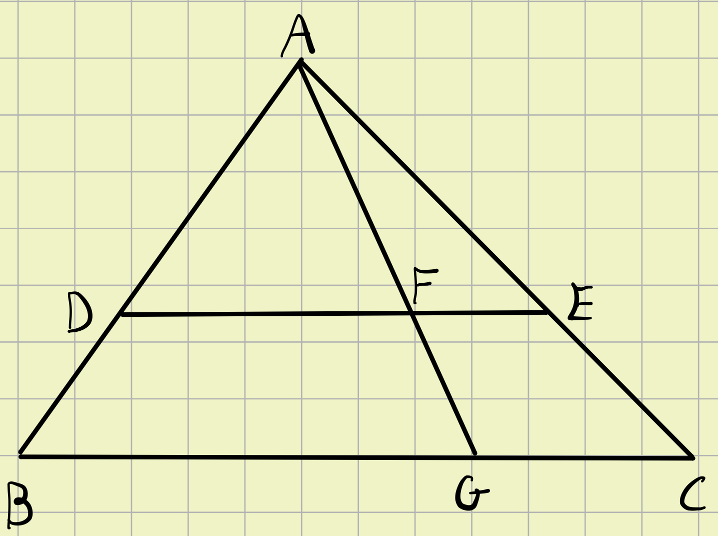
$\Downarrow$ עפ"י הרחבה ראשונה של תלס ב-$\triangle ABC$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

הערה: גם שימוש בהרחבה הראשונה של תלס בבגרות מתאפיין בציון המשפט לצד המשולש הרלוונטי.

טיפ שימושי: על מנת לדעת בזמן אמת האם יש צורך להשתמש במשפט תלס או בהרחבתה הראשונה, נבחן האם נדרשת התייחסות לפרופורציה בין הישרים המקבילים.

דוגמת תרגיל:



נתון: $DE \parallel BC$

הוכיחו: $\frac{DF}{BG} = \frac{FE}{GC}$

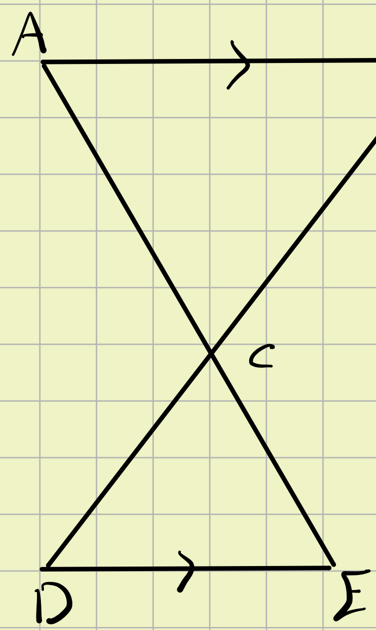
	טענה	נימוק
1	$DE \parallel BC$	נתון
2	$DF \parallel BG$	חלקי קטעים מקבילים גם הם
3	$\frac{DF}{BG} = \frac{AF}{AG}$	הרחבה ראשונה של תאלס ב- $\triangle ABG$
4	$FE \parallel GC$	חלקי קטעים מקבילים גם הם
5	$\frac{FE}{GC} = \frac{AF}{AG}$	הרחבה ראשונה של תאלס ב- $\triangle AGC$
6	$\frac{FE}{GC} = \frac{DF}{BG}$	כלל המעבר

∎

הרחבה שנייה של תאלס:

הרחבה נוספת שהוכחה למשפט תאלס, מכונה ע"י תלמידים "הרחבת שעון החול", שייחודה הוא חיתוך בין 2 משולשים.

ההרחבה השנייה:



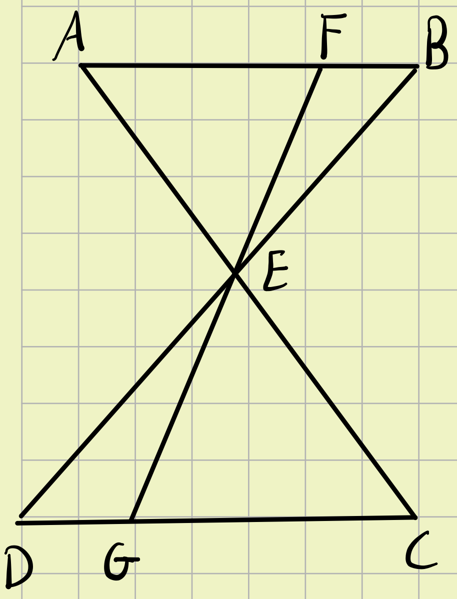
נתון: $AB \parallel DE$

$\Downarrow$ עפ"י הרחבה שנייה של תאלס ב-$\triangle ABC$ ו-$\triangle DEC$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DC} = \frac{AB}{DE}$$

הערה: גם שימוש בהרחבה השנייה של תאלס בבחירת מתאפיין בציון המשפט עבור המשולשים הרלוונטיים

דוגמת תרגיל:



נתון: AC, BD נחתכים בנק' E.

$AB \parallel DC$

הוכיחו: $\frac{AB}{DC} = \frac{FE}{EG}$

	טענה	נימוק
1	$AB \parallel DC$	נתון
2	$\frac{AB}{DC} = \frac{BE}{DE}$	הרחבה שנ״ה של תלס ב- $\triangle EDC$, $\triangle ABE$
3	$FB \parallel DG$	חלקי קטעים מקבילים, מקבילים גם הם
4	$\frac{FE}{EG} = \frac{BE}{DE}$	הרחבה שנ״ה של תלס ב- $\triangle DGE$, $\triangle FBE$
5	$\frac{FE}{EG} = \frac{AB}{DC}$	כלל המעבר

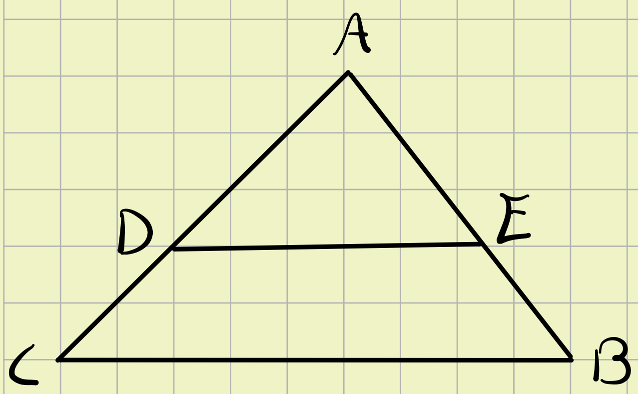
■

המשפט ההפוך למשפט תאלס:

כאשר הגדרנו גיאומטרית את משפט תאלס, חדי העין ביניכם ודאי הבחנתם בקשר הלוגי "אם ורק אם" ($\Leftrightarrow$), שמשמעותו היא שכפי שהקבלה בין ישרים מקצה קטעים פרופורציונליים, כך גם קטעים פרופורציונליים מהווים תנאי מספיק להקבלת הישרים.

משפט תאלס הפוך: אם שני ישרים מקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציונליים, אזי הישרים מקבילים זה לזה.

הגדרה גיאומטרית:



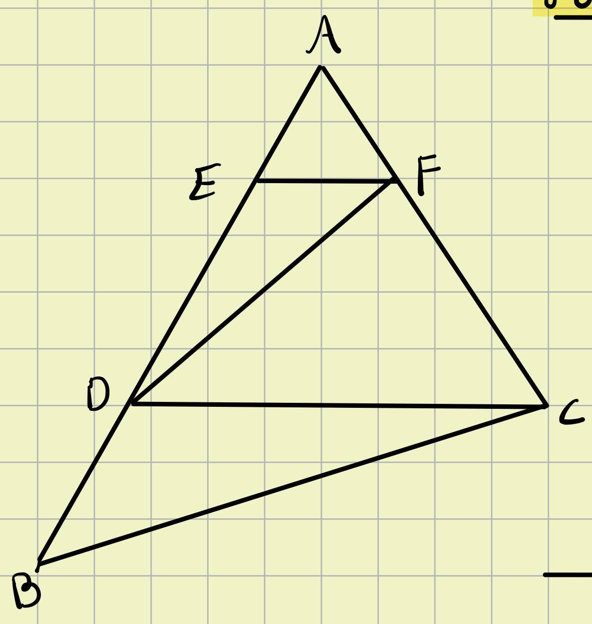
נתון: $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BE}$

$\Updownarrow$ משפט תאלס הפוך ב-$\triangle ABC$

$DE \parallel BC$

הערה: גם שימוש במשפט תאלס ההפוך בהגדרות מתאפיין בציון שם המשפט לצד המשולש הרלוונטי.

דוגמאת תרגיל:



נתון: $EF \parallel DC$, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE}$

הוכיחו: $DF \parallel BC$

	טענה	נימוק
1	$EF \parallel DC$ $\Downarrow$	נתון
2	$\frac{AE}{DE} = \frac{AF}{FC}$	משפט תאלס ב- $\triangle ADC$
3	$\frac{AE}{DE} = \frac{AD}{DB}$	נתון
4	$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC}$	כלל המעבר
5	$DF \parallel BC$	משפט תאלס ההפוך ב- $\triangle ABC$

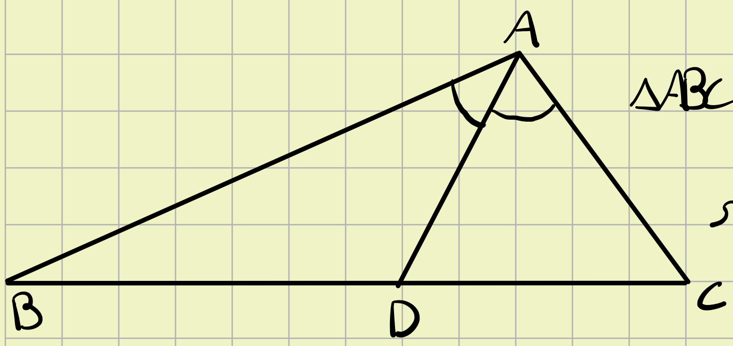
∎

משפט חוצה זווית:

משפט חוצה זווית:

חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית.

הגדרה גיאומטרית:



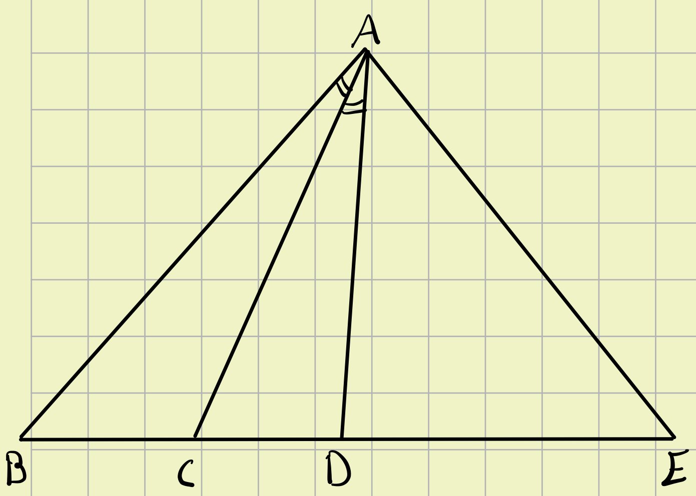
נתון: AD חוצה $\measuredangle A$ ב- $\triangle ABC$

$\Updownarrow$ משפט חוצה זווית ב- $\triangle ABC$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}$$

הערה: גם שימוש במשפט חוצה זווית בבגרות מתאפיין בציון שם המשפט ומשולש הרלוונטי.

דוגמאות תרגיל:



נתון: AC חוצה $\measuredangle BAD$

$BC =$ 9 ס"מ , $DC =$ 6 ס"מ

$AB = AD + 6$

הוכיחו: $AD = ?$

	טענה	נימוק
1	$BC =$ 9 ס"מ	נתון
2	$DC =$ 6 ס"מ	נתון
3	$AD = x$	סימון
4	$AB = x + 6$	נתון, $AB = AD + 6$, כלל המעבר
5	AC חוצה $\measuredangle BAD$ $\Downarrow$	נתון
6	$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$	משפט חוצה זווית ב- $\triangle BAD$
7	$\frac{x+6}{x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	הצבה + צמצום
8	$x =$ 12 ס"מ	חישוב
9	$AD = x =$ 12 ס"מ	הצבה

∎